

# Методы построения разностных схем

## 1 Однородные схемы для уравнения второго порядка с переменными коэффициентами

Под *однородными* разностными схемами понимаются разностные схемы, вид которых не зависит ни от выбора конкретной задачи из некоторого класса задач, ни от выбора разностной сетки. Во всех узлах сетки для любой задачи из данного класса разностное уравнение имеет один и тот же вид. Коэффициенты однородной разностной схемы получаются в результате действия так называемых *шаблонных функционалов* на коэффициенты дифференциального уравнения.

Однородными разностными схемами *сквозного или непрерывного счета* называются схемы, позволяющие решать уравнения с разрывными коэффициентами без явного выделения точек или линий разрыва по одним и тем же формулам для разрывных и непрерывных коэффициентов.

Для рассмотрения теории однородных разностных схем необходимо задать некоторое *исходное семейство схем* для задач рассматриваемого класса. Семейство однородных разностных схем задано, если задано семейство допустимых шаблонных функционалов схемы.

В качестве примера далее будем рассматривать класс задач для стационарного уравнения теплопроводности на отрезке:

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left( k(x) \frac{du}{dx} \right) - q(x)u = -f(x), & x \in (0, 1); \\ u(0) = u_0, & u(1) = u_1, \end{cases} \quad (1.1)$$

где  $k(x) \geq C_1 > 0$ ,  $q(x) \geq 0$ .

Если функция  $k(x)$  имеет разрыв первого рода при  $x = \xi$ , то задачу (1.1) необходимо дополнить условиями сопряжения:

$$[u] = 0, \quad [ku'] = 0 \quad \text{при } x = \xi.$$

Пусть на отрезке  $[0, 1]$  введена равномерная сетка  $\overline{\omega}_h$ . Дифференциальное уравнение (1.1) можно аппроксимировать разностным уравнением второго порядка:

$$a_i y_{i-1} - c_i y_i + b_i y_{i+1} = -h^2 \varphi_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1,$$

которое можно также записать в виде:

$$\frac{1}{h} \left( b_i \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - a_i \frac{y_i - y_{i-1}}{h} \right) - d_i y_i + \varphi_i = 0, \quad (1.2)$$

где  $d_i = \frac{c_i - b_i - a_i}{h^2}$ .

В теории однородных разностных схем разностный оператор вначале определяется на некотором целочисленном шаблоне. Пусть разностный оператор записывается на  $m_1 + m_2 + 1$  узлах сетки, то есть шаблон содержит  $m_1 + m_2 + 1$  точек:

$$\mathfrak{M} \equiv \{-m_1, -m_1 + 1, \dots, -1, 0, 1, \dots, m_2 - 1, m_2\}.$$

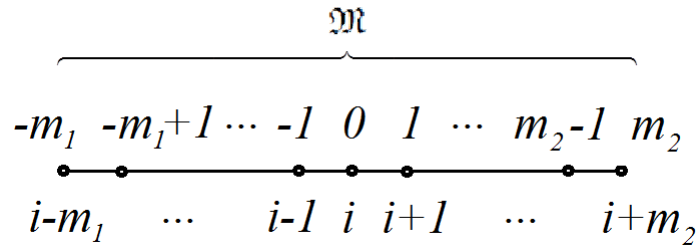


Рис. 1: Схематический вид целочисленного (коэффициентного) шаблона  $\mathfrak{M}$

Поставим в соответствие коэффициентам  $k(x)$ ,  $q(x)$  и правой части  $f(x)$  исходного дифференциального уравнения векторы  $\vec{k}^i(s)$ ,  $\vec{q}^i(s)$  и  $\vec{f}^i(s)$ ,  $s \in [-m_1, m_2]$ , размерности  $m_1 + m_2 + 1$ , заданные на коэффициентном шаблоне  $\mathfrak{M}$ :

$$\vec{k}^i(s) = \{k(x_{i-m_1}), k(x_{i-m_1+1}), \dots, k(x_i), k(x_{i+1}), \dots, k(x_{i+m_2})\},$$

$$\vec{q}^i(s) = \{q(x_{i-m_1}), q(x_{i-m_1+1}), \dots, q(x_i), q(x_{i+1}), \dots, q(x_{i+m_2})\},$$

$$\vec{f}^i(s) = \{f(x_{i-m_1}), f(x_{i-m_1+1}), \dots, f(x_i), f(x_{i+1}), \dots, f(x_{i+m_2})\}.$$

**Определение 1.1** Схема (1.2) называется однородной, если коэффициенты разностного уравнения (1.2) при любых кусочно-непрерывных функциях  $k(x)$ ,  $q(x)$  и  $f(x)$  во всех узлах  $x_i$  произвольной сетки  $\omega_h$  определяются по одним и тем же формулам:

$$a_i = A^h[\vec{k}^i(s)], \quad b_i = B^h[\vec{k}^i(s)], \quad d_i = D^h[\vec{q}^i(s)], \quad \varphi_i = F^h[\vec{f}^i(s)], \quad (1.3)$$

где  $A^h[\cdot]$ ,  $B^h[\cdot]$ ,  $D^h[\cdot]$  и  $F^h[\cdot]$  — некоторые шаблонные функционалы, зависящие, вообще говоря, от параметра  $h$  и определенные для вектор-функций  $\vec{k}^i(s)$ ,  $\vec{q}^i(s)$  и  $\vec{f}^i(s)$ ,  $s \in [-m_1, m_2]$ .

Если схема (1.2) однородна, то во всех узлах сетки  $\omega_h$  коэффициенты определяются одинаковым образом, и поэтому индекс  $i$  можно опустить:

$$\frac{1}{h} (by_x - ay_x) - dy = \varphi, \quad y(0) = u_0, \quad y(1) = u_1. \quad (1.4)$$

Требования аппроксимации и разрешимости задачи (1.4) накладывают ограничения на выбор шаблонных функционалов  $A^h[\cdot]$ ,  $B^h[\cdot]$ ,  $D^h[\cdot]$  и  $F^h[\cdot]$ . Будем исходить из второго порядка погрешности аппроксимации. Ранее было показано, что второй порядок аппроксимации разностной задачей (1.4) исходной краевой задачи (1.1) будет обеспечен, если:

$$\frac{b-a}{h} = k'(x) + O(h^2), \quad \frac{b+a}{2} = k(x) + O(h^2), \quad d(x) = q(x) + O(h^2), \quad \varphi(x) = f(x) + O(h^2). \quad (1.5)$$

Из принципа максимума следует, что для разрешимости задачи (1.4) достаточно, чтобы выполнялись условия:

$$a > 0, \quad b > 0, \quad d \geq 0, \quad x \in \omega_h. \quad (1.6)$$

Будем рассматривать семейство разностных схем (1.4), для которых выполнены условия (1.5) и (1.6). Основным интересом для нас будут представлять схемы, сходящиеся в случае разрывных функций  $k(x)$ ,  $q(x)$  и  $f(x)$ .

Можно показать на примере, что не всякая схема вида (1.4), удовлетворяющая условиям аппроксимации (в случае гладких коэффициентов) и разрешимости, сходится в классе задач с разрывными коэффициентами.

## 2 Консервативные разностные схемы

### 2.1 Пример схемы, расходящейся в случае разрывных коэффициентов

Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{cases} (k(x)u'(x))' = 0, & 0 < x < 1; \\ u(0) = 1, \quad u(1) = 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Раскроем скобки в уравнении:  $(ku')' = ku'' + k'u'$ . Аппроксимируем дифференциальные операторы со вторым порядком:

$$u'' \sim u_{\bar{x}x}, \quad u' \sim u_{\dot{x}}, \quad k' \sim k_{\dot{x}},$$

где

$$u_{\bar{x},i} = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}.$$

В результате получим разностную задачу:

$$\begin{cases} k_i \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + \frac{k_{i+1} - k_{i-1}}{2h} \cdot \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} = 0, & 1 \leq i \leq N-1; \\ y_0 = 1, \quad y_N = 0. \end{cases} \quad (2.2)$$

Приведем схему (2.2) к виду (1.4):

$$\begin{cases} \frac{1}{h} (by_x - ay_{\bar{x}}) - dy + \varphi = 0, & 1 \leq i \leq N-1; \\ y_0 = 1, \quad y_N = 0. \end{cases} \quad (2.3)$$

Для этого преобразуем уравнение (2.2):

$$\begin{aligned} 0 &= k_i (y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}) + \frac{k_{i+1} - k_{i-1}}{4} (y_{i+1} - y_{i-1}) = k_i (y_{i+1} - y_i) - k_i (y_i - y_{i-1}) + \\ &\quad + \frac{k_{i+1} - k_{i-1}}{4} [(y_{i+1} - y_i) + (y_i - y_{i-1})] = \\ &= \left( k_i + \frac{k_{i+1} - k_{i-1}}{4} \right) (y_{i+1} - y_i) - \left( k_i - \frac{k_{i+1} - k_{i-1}}{4} \right) (y_i - y_{i-1}), \end{aligned}$$

откуда получаем:

$$b_i = k_i + \frac{k_{i+1} - k_{i-1}}{4}, \quad a_i = k_i - \frac{k_{i+1} - k_{i-1}}{4}, \quad d_i = \varphi_i = 0.$$

Таким образом, схема (2.2) принадлежит к исходному семейству схем.

Покажем, что схема (2.2) расходится в случае разрывного коэффициента  $k(x)$ , причем даже в классе кусочно постоянных коэффициентов:

$$k(x) = \begin{cases} k_1, & 0 < x < \xi, \\ k_2, & \xi < x < 1, \end{cases}$$

где  $\xi$  — иррациональное число,  $\xi = x_n + \theta h$ ,  $n$  — некоторое фиксированное натуральное число в пределах от 1 до  $N-1$ ,  $\theta \in (0, 1)$ .

Найдем точное решение задачи (2.1), удовлетворяющее в точке  $x = \xi$  условиям сопряжения  $[u] = 0$ ,  $[ku'] = 0$ :

$$u(x) = \begin{cases} 1 - \alpha_0 x, & 0 < x < \xi, \\ \beta_0 (1 - x), & \xi < x < 1. \end{cases} \quad (2.4)$$

Подставляя (2.4) в условия сопряжения, получаем систему:

$$\begin{cases} 1 - \alpha_0 \xi = \beta_0 (1 - \xi) \\ -k_1 \alpha_0 = -k_2 \beta_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta_0 = \varkappa \alpha_0 \\ \alpha_0 = \frac{1}{\varkappa(1 - \xi) + \xi} = \frac{1}{\varkappa + (1 - \varkappa)\xi}, \end{cases}$$

где  $\varkappa = \frac{k_1}{k_2}$ .

Найдем решение разностной задачи (2.2). Так как  $a_i = b_i = k_1$  при  $0 < i < n$  и  $a_i = b_i = k_2$  при  $n + 1 < i < N$ , то уравнение (2.2) при  $i \neq n$  и  $i \neq n + 1$  принимает вид:

$$y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} = 0.$$

Его решение имеет вид:

$$y_i = y(x_i) = \begin{cases} 1 - \alpha x_i, & 0 \leq x_i \leq x_n, \\ \beta(1 - x_i), & x_{n+1} \leq x_i \leq 1. \end{cases} \quad (2.5)$$

Коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$  определим из уравнения

$$by_x - ay_{\bar{x}} = 0$$

при  $i = n$  и  $i = n + 1$ . При  $i = n$ , с учетом того, что  $x_n = \xi - \theta h$  и  $x_{n+1} = \xi + (1 - \theta)h$ , получаем:

$$\begin{aligned} 0 &= b_n(y_{n+1} - y_n) - a_n(y_n - y_{n-1}) = b_n[\beta(1 - x_{n+1}) - (1 - \alpha x_n)] - a_n((1 - \alpha x_n) - (1 - \alpha x_{n-1})) = \\ &= b_n[\beta(1 - (\xi + (1 - \theta)h)) - (1 - \alpha(\xi - \theta h))] + a_n\alpha h = \\ &= \beta b_n(1 - \xi - (1 - \theta)h) + \alpha(a_n h + b_n(\xi - \theta h)) - b_n. \end{aligned}$$

При  $i = n + 1$  получаем:

$$\begin{aligned} 0 &= b_{n+1}(y_{n+2} - y_{n+1}) - a_{n+1}(y_{n+1} - y_n) = b_{n+1}[\beta(1 - x_{n+2}) - \beta(1 - x_{n+1})] - \\ &- a_{n+1}[\beta(1 - x_{n+1}) - (1 - \alpha x_n)] = -\beta b_{n+1}h - a_{n+1}[\beta(1 - \xi - (1 - \theta)h) - (1 - \alpha(\xi - \theta h))] = \\ &= -\beta[b_{n+1}h + a_{n+1}(1 - \xi - (1 - \theta)h)] - \alpha a_{n+1}(\xi - \theta h) + a_{n+1}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} b_n &= k_n + \frac{k_{n+1} - k_{n-1}}{4} = k_1 + \frac{k_2 - k_1}{4} = \frac{3k_1 + k_2}{4}, \\ b_{n+1} &= k_{n+1} + \frac{k_{n+2} - k_n}{4} = k_2 + \frac{k_2 - k_1}{4} = \frac{5k_2 - k_1}{4}, \\ a_n &= k_n - \frac{k_{n+1} - k_{n-1}}{4} = k_1 - \frac{k_2 - k_1}{4} = \frac{5k_1 - k_2}{4}, \\ a_{n+1} &= k_{n+1} - \frac{k_{n+2} - k_n}{4} = k_2 - \frac{k_2 - k_1}{4} = \frac{3k_2 + k_1}{4}. \end{aligned}$$

Решим систему для коэффициентов  $\alpha$  и  $\beta$ :

$$\begin{cases} \beta b_n(1 - \xi - (1 - \theta)h) + \alpha(a_n h + b_n(\xi - \theta h)) = b_n \\ \beta[b_{n+1}h + a_{n+1}(1 - \xi - (1 - \theta)h)] + \alpha a_{n+1}(\xi - \theta h) = a_{n+1}. \end{cases} \quad (2.6)$$

Пусть  $\varkappa = \frac{k_1}{k_2}$ . Тогда  $\frac{a_n}{b_n} = \frac{5\varkappa - 1}{3\varkappa + 1}$  и  $\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} = \frac{5 - \varkappa}{3 + \varkappa}$ , и система (2.6) упрощается:

$$\begin{cases} \beta(1 - \xi - (1 - \theta)h) + \alpha(\lambda h + \xi - \theta h) = 1 \\ \beta \left[ \frac{5 - \varkappa}{3 + \varkappa} h + 1 - \xi - (1 - \theta)h \right] + \alpha(\xi - \theta h) = 1. \end{cases}$$

где  $\lambda = \frac{5\varkappa - 1}{3\varkappa + 1}$ . Вычитая из первого уравнения второе, получаем:

$$\alpha\lambda h - \beta \frac{5 - \varkappa}{3 + \varkappa} h = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta = \mu\alpha,$$

где  $\mu = \lambda \frac{3 + \varkappa}{5 - \varkappa}$ . Подставляя найденное  $\beta$ , например, в первое уравнение, получаем:

$$\alpha = (\mu + (1 - \mu)\xi + h(\lambda - \theta - (1 - \theta)\mu))^{-1}.$$

Предельный переход при  $h \rightarrow 0$  дает:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \alpha = \bar{\alpha}_0 = (\mu + (1 - \mu)\xi)^{-1}; \quad \lim_{h \rightarrow 0} \beta = \bar{\beta}_0 = \mu\bar{\alpha}_0.$$

С помощью интерполяции доопределим функцию  $y_i$ , определяемую выражением (2.5), на всем отрезке  $0 \leq x \leq 1$ . В результате получим функцию  $\tilde{y}(x, h)$ , заданную при  $x \in [0, 1]$ , причем:

$$\tilde{y}(x_i, h) = y_i.$$

Перейдем к пределу:

$$\tilde{u}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \tilde{y}(x_i, h) = \begin{cases} 1 - \bar{\alpha}_0 x, & 0 \leq x \leq \xi, \\ \bar{\beta}_0(1 - x), & \xi \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (2.7)$$

Сравним  $\tilde{u}(x)$  с точным решением (2.4) задачи:  $\tilde{u}(x) = u(x)$  тогда и только тогда, когда

$$\bar{\alpha}_0 = \alpha_0 = \frac{1}{\varkappa + (1 - \varkappa)\xi}$$

и

$$\bar{\beta}_0 = \beta_0 = \varkappa \frac{1}{\varkappa + (1 - \varkappa)\xi}.$$

Следовательно, схема сходится, если выполнено равенство:

$$\varkappa + (1 - \varkappa)\xi = \mu + (1 - \mu)\xi \Leftrightarrow (\mu - \varkappa)(1 - \xi) = 0 \Leftrightarrow \mu = \varkappa,$$

так как  $\xi < 1$ . Пользуясь выражением для  $\mu$ , получаем:

$$0 = \varkappa - \underbrace{\frac{5\varkappa - 1}{3\varkappa + 1} \cdot \frac{3 + \varkappa}{5 - \varkappa}}_{\mu} = 3 \frac{(1 - \varkappa)^3}{(3\varkappa + 1)(5 - \varkappa)},$$

откуда следует, что  $\tilde{u}(x)$  и  $u(x)$  совпадают лишь при  $\varkappa = 1$ , то есть при  $k_1 = k_2$ .

*Вывод:* решение (2.5) разностной задачи (2.2) при  $h \rightarrow 0$  стремится к функции  $\tilde{u}(x)$ , которая при  $k_1 \neq k_2$  отлична от точного решения исходной задачи (2.1) с условиями сопряжения  $[u] = 0$ ,  $[ku'] = 0$ , то есть разностная схема (2.2) расходится.

Для того, чтобы объяснить этот эффект, рассмотрим физический смысл функции  $\tilde{u}(x)$ . Она представляет собой решение задачи:

$$\begin{cases} (k(x)\tilde{u}'(x))' = 0, & 0 < x < \xi, \quad \xi < x < 1; \\ \tilde{u}(0) = 1, \quad \tilde{u}(1) = 0, \\ [\tilde{u}]|_{x=\xi} = 0, \quad [k\tilde{u}']|_{x=\xi} = -k_2\bar{\beta}_0 + k_1\bar{\alpha}_0 = -\bar{\alpha}_0(\mu - \varkappa)k_2 = q, \end{cases}$$

где  $q$  — мощность точечного источника (стока) тепла при  $x = \xi$ , причем  $q \rightarrow \pm\infty$  при  $\varkappa \rightarrow 5 \pm 0$ .

Физическая причина расходимости схемы (2.2) состоит в том, что она нарушает баланс (закон сохранения) тепла.

Схемы, нарушающие законы сохранения, называются *неконсервативными* или *дисбалансными*. Схемы, выражающие на сетке соответствующий закон сохранения, называются *консервативными* или *дивергентными*.

Законы сохранения на всей сеточной области (интегральные законы сохранения) для консервативных схем должны быть алгебраическим следствием разностных уравнений.

## 2.2 Интегро-интерполяционный метод (метод баланса) построения консервативных разностных схем

Рассмотрим один из методов построения консервативных схем на примере задачи о стационарном распределении тепла на отрезке:

$$\begin{cases} (k(x)u'(x))' - q(x)u(x) = -f(x), & 0 < x < l; \\ u(0) = u_0, \quad u(l) = u_1. \end{cases} \quad (2.8)$$

Для уравнения (2.8) справедлив закон сохранения тепла (уравнение баланса), который на любом отрезке  $a \leq x \leq b$ , где  $0 < a < b < l$ , имеет вид:

$$W(a) - W(b) - \int_a^b q(x)u(x)dx + \int_a^b f(x)dx = 0. \quad (2.9)$$

Здесь  $W(x) = -k(x)\frac{du}{dx}$  — поток тепла,  $k(x) > 0$  — коэффициент теплопроводности,  $u(x)$  — температура. Уравнение (2.9) получается интегрированием (2.8) по отрезку  $a \leq x \leq b$ .

Пусть  $\omega_h$  — равномерная сетка с шагом  $h$ . Введем промежуточные, так называемые *поточковые* узлы  $x_{i\pm 0.5} = x_i \pm 0.5h$  и запишем уравнение баланса (2.9) на отрезке  $x_{i-0.5} \leq x \leq x_{i+0.5}$ :

$$W_{i-0.5} - W_{i+0.5} - \int_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} q(x)u(x)dx + \int_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} f(x)dx = 0. \quad (2.10)$$

Предположим, что  $u = u_i = \text{const}$  при  $x_{i-0.5} \leq x \leq x_{i+0.5}$ . Тогда

$$\int_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} q(x)u(x)dx \simeq hu_i d_i, \quad (2.11)$$

где

$$d_i = \frac{1}{h} \int_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} q(x)dx = \int_{-0.5}^{0.5} q(x_i + s \cdot h)ds.$$

Найдем  $W_{i-0.5}$  и  $W_{i+0.5}$ . Для этого проинтегрируем равенство  $\frac{du}{dx} = -\frac{W}{k}$  на отрезке  $[x_{i-1}, x_i]$ :

$$u_{i-1} - u_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{W}{k} dx.$$

Предполагая, что  $W = W_{i-0.5} = \text{const}$  при  $x_{i-1} \leq x \leq x_i$ , получим:

$$u_{i-1} - u_i \simeq W_{i-0.5} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)} \Rightarrow W_{i-0.5} \simeq -a_i \frac{u_i - u_{i-1}}{h} = -a_i u_{\bar{x},i}, \quad (2.12)$$

где

$$a_i = \left( \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)} \right)^{-1}.$$

Подставляя выражения (2.11) и (2.12) в уравнение (2.10) и вводя обозначение:

$$\varphi_i = \frac{1}{h} \int_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} f(x)dx = \int_{-0.5}^{0.5} f(x_i + s \cdot h)ds,$$

получим разностную схему, выражающую на сетке закон сохранения тепла:

$$\begin{cases} \frac{1}{h} \left( a_{i+1} \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - a_i \frac{y_i - y_{i-1}}{h} \right) - d_i y_i = -\varphi_i, & i = 1, 2, \dots, N-1 \\ y_0 = u_0, & y_N = u_1, \end{cases}$$

или же

$$\begin{cases} (ay_{\bar{x}})_x - dy = -\varphi, & 0 < x < l; \\ y_0 = u_0, & y_N = u_1. \end{cases} \quad (2.13)$$



Интегралы, с помощью которых вычисляются коэффициенты  $a$ ,  $d$  и  $\varphi$ , представляют собой шаблонные функционалы.

Разностная схема (2.13) с введенными выше коэффициентами аппроксимирует уравнение (2.8) при достаточной гладкости решения  $u(x)$  с порядком  $O(h^2)$ .

Если коэффициенты уравнения (2.8) являются гладкими функциями, то с точностью до  $O(h^2)$  можно положить:

$$a_i = k(x_{i-1/2}), \quad d_i = q(x_i), \quad \varphi_i = f(x_i).$$

Интегро-интерполяционный метод может быть использован для аппроксимации граничных условий, а также для записи разностной аппроксимации оператора Лапласа в полярной и сферической системах координат (в частности, в особой точке  $r = 0$ ).

Уравнение баланса (2.9) можно использовать для построения консервативной разностной схемы на неравномерных сетках.

Метод конечных разностей физически означает переход от непрерывной среды к некоторой ее дискретной модели. При таком подходе естественно требовать, чтобы основные физические процессы сохранялись. Такими свойствами являются прежде всего законы сохранения.

### 3 Задания для самостоятельного решения

Поставьте начально-краевую задачу о продольных колебаниях упругого стержня постоянного поперечного сечения и длины  $l$  ( $x \in [0, l]$ ), считая деформацию поперечных сечений пренебрежимо малой. Плотность массы стержня равна  $\rho(x)$ , модуль упругости равен  $E(x)$ , концы стержня закреплены неподвижно. Пусть колебания стержня вызваны начальным продольным смещением  $u(x, 0) = \varphi(x)$ , а начальная скорость равна нулю.

Реализуйте численное решение задачи с помощью неконсервативной схемы и консервативной схемы, построенной методом баланса, и сравните с точным решением задачи.

1) Стержень состоит из двух состыкованных:

$$\rho(x) = \begin{cases} \rho_1, & x \in (0, x_0) \\ \rho_2, & x \in (x_0, l) \end{cases} \quad E(x) = \begin{cases} E_1, & x \in (0, x_0) \\ E_2, & x \in (x_0, l) \end{cases}$$

где  $\rho_i$ ,  $E_i$  — константы, а начальное отклонение стержня имеет вид:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{\sin(\lambda^{(1)}x/a_1)}{\sin(\lambda^{(1)}x_0/a_1)}, & x \in [0, x_0] \\ \frac{\sin(\lambda^{(1)}(l-x)/a_2)}{\sin(\lambda^{(1)}(l-x_0)/a_2)}, & x \in [x_0, l] \end{cases}$$

где  $a_i^2 = \frac{E_i}{\rho_i}$ , а  $\lambda^{(1)}$  — первый положительный корень уравнения:

$$\sqrt{\rho_1 E_1} \cdot \operatorname{tg} \left( \frac{\lambda}{a_2} (x_0 - l) \right) = \sqrt{\rho_2 E_2} \cdot \operatorname{tg} \left( \frac{\lambda}{a_1} x_0 \right).$$

2) Плотность стержня и модуль упругости имеют вид:

$$\rho(x) = \rho_0 \cdot (L - x)^2, \quad E(x) = E_0 \cdot (L - x)^2, \quad L > l,$$

а начальное отклонение равно:

$$\varphi(x) = \frac{1}{L - x} \cdot \sin \frac{\pi x}{l}.$$